TD 14 : Dérivation

Dérivation

Exercice 1. Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto x^2 \lfloor x \rfloor \qquad g : x \mapsto \sin(x)\sqrt{|\sin x|} \qquad h : x \mapsto \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 2. Déterminer les ensembles de définition, de dérivabilité, et la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$
2) $F : x \mapsto \dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}$
3) $g : x \mapsto \arctan(\operatorname{sh} x)$
4) $G : x \mapsto \sqrt{4-3x-x^2}$
5) $h : x \mapsto \ln|\tan x|$
6) $H : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$

Exercice 3. Pour chacune des fonctions suivantes, étudier le prolongement par continuité en 0 puis la dérivabilité en 0 du prolongement :

$$f : x \mapsto x \ln|x| \qquad g : x \mapsto x^x \qquad h : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad i : x \mapsto \frac{1-\cos x}{\sin x}$$

Exercice 4. Soit $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\sin x} + x$.

1) Justifier que f réalise une bijection de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J à préciser.
2) Est-ce que f est dérivable en 0 ?
3) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur $J \setminus \{0\}$, puis en 0.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable ayant pour limite finie ℓ en $-\infty$ et en $+\infty$. On pose $g = f \circ \tan$ définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1) Montrer que g est prolongeable par continuité sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2) En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Les grands théorèmes de dérivation

Exercice 6. Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

Exercice 7. En utilisant le théorème des accroissements finis, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right]$

Exercice 8. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{(k+1)^2+1} \leq \arctan(k+1) - \arctan(k) \leq \frac{1}{k^2+1}$$

En déduire un encadrement de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Avec l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

$$\sqrt{101} \approx 10 \qquad \cos 1 \approx \frac{1}{2} \qquad \sin \frac{1}{100} \approx \frac{1}{100}$$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodique de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que f' est périodique et en déduire que f est lipschitzienne.

Exercice 11. 1) Étudier la dérivabilité sur $[0,1]$ de la fonction $x \mapsto \arccos \sqrt{1-x^2}$.

2) Démontrer que la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}\sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui s'annule en n points. Montrer que f' s'annule en au moins $n-1$ points.

Dérivées n-ièmes

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions définies par les expressions suivantes :

1) $f(x) = \ln x$
2) $g(x) = (x^3 + x^2)e^{-x}$
3) $h(x) = \sin^3 x$
4) $F(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$
5) $G(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$
6) $H(x) = e^x \sin x$

Pour G, on pourra d'abord calculer les dérivées n-ièmes de $x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$.

Exercice 14. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ est de classe C^∞.

Exercice 15. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer la plus grande valeur de $k \in \mathbb{N}$ telle que la fonction est de classe $\mathcal{C}^k$.

$$f(x) = x|x| \qquad g(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable. On suppose que

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(b) = 0$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 17 ($\star$)**.** Soit f une fonction polynômiale. Montrer que l'équation $f(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions. *Indication : on pourra s'inspirer du résultat de l'exercice 12.*